数理解析研究所講究録
135巻 1972年 2-9

On discrete series

Tata Institute
M.S. Narasimhan

§.1. 準備

Gを単連結複素半単純リー群G_cの一つの非コンパクトreal formとし Kをその極大コンパクト部分群とする。Gのハール測度に関するG上の自乗可積分函数のなすヒルベルト空間を$L_2(G)$で表わせばGの元の左移動により左正則表現が得られる。Gの既約ユニタリー表現πが$L_2(G)$の部分表現として実現されるときπは discrete class とよばれ, discrete classes の集合$\mathcal{E}_d$を discrete series という。

補題 1.1. (Harish-Chandra)

$$\mathcal{E}_d \neq \phi \iff \operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K .$$

以下 $\operatorname{rank} G = \operatorname{rank} K$ と仮定し Kに含まれるGのカルタン部分群をTとする。G, K, Tのリー環を$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{t}$ さらにそれらの複素化をそれぞれ$\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{t}_c$で表わす。

$\mathfrak{h}_c$ 上の整型式の全体を $\mathfrak{F}$ とし，キリング形式により $\mathfrak{F}$ 上に定義される内積を $\langle\ ,\ \rangle$ とかく。$\mathfrak{g}_c$ の $\mathfrak{h}_c$ に関する root の全体は $\mathfrak{F}$ に含まれ さらに $\mathfrak{F}$ に辞書式順序を任意に導入するとき 正のルートの和の半分 ρ は 又 $\mathfrak{F}$ に属する。 正のルート全体を P とかき，コンパクトルート（即ちルートベクトルが $\mathfrak{k}_c$ に属するもの）全体を P_k とし，$P_n = P - P_k$ とおく。 P_n の元は 非コンパクトルートと呼ばれる。

$$\mathfrak{F}' = \{\lambda \in \mathfrak{F}\ ;\ \langle \lambda+\rho, \alpha \rangle \neq 0 \quad (\alpha \in P)\},$$
$$\mathfrak{F}_0' = \{\lambda \in \mathfrak{F}'\ ;\ \langle \lambda+\rho, \alpha \rangle > 0 \quad (\alpha \in P_k)\}$$

とおくとき次が成立する。

補題 1.2.（Harish-Chandra）

Bijection map

$$\mathfrak{F}_0' \ni \lambda \longmapsto \pi_\lambda \in \mathcal{E}_d$$

が存在して π_λ の指標は G の tempered distribution $\Theta_{w(\lambda+\rho)}$ で与えられる。

§ 2. 調和形式と discrete series

本節では 等質空間 G/K が不変複素構造をもつと仮定し，最高ウェイト $\Lambda \in \mathfrak{F}_0'$ をもつ K の既約表現 τ_Λ に associate

した G/K 上の複素解析的ベクトルバンドルを E_Λ で表わす。このとき E_Λ に値をもつ $(0,q)$ 型の C^∞-級微分形式のなすベクトル空間 $C^{0,q}(E_\Lambda)$ を考えると

Dolbeault complex

$$\cdots\ C^{0,q}(E_\Lambda) \xrightarrow{\bar\partial} C^{0,q+1}(E_\Lambda) \longrightarrow \cdots$$

が得られる。 $\bar\partial$ の formal adjoint operator を ϑ とし

$$C^+ = \sum_{q:\mathrm{even}} C^{0,q}(E_\Lambda)$$

$$C^- = \sum_{q:\mathrm{odd}} C^{0,q}(E_\Lambda)$$

とおき、微分作用素

$$\bar\partial + \vartheta : C^+ \longrightarrow C^- \longrightarrow C^+$$

を考える。 E_Λ に値をもつ自乗可積分な $(0,q)$ 型の微分形式のなすヒルベルト空間を $L_2^{0,q}(E_\Lambda)$ とし $L_2 = \sum_q L_2^{0,q}(E_\Lambda)$ と定義する。

$$H^+ = \{ u \in C^+ \cap L_2 \ ; (\bar\partial + \vartheta)u = 0 \},$$

$$H^- = \{ u \in C^- \cap L_2 \ ; (\bar\partial + \vartheta)u = 0 \}$$

とおき、集合 $\{\alpha \in P_n \ ; \langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle > 0\}$ の元の個数を q_Λ とかく。

$$H_2^{0,q}(E_\Lambda) = \{ u \in C^{0,q}(E_\Lambda) \cap L_2 \ ; (\bar\partial + \vartheta)u = 0 \}$$

とおき、$H_2^{0,q}(E_\Lambda)$, H^+, H^- 上に自然に定義される G のユニタリー表現をそれぞれ π_Λ^q, π^+, π^- とするとき次が成立する。

定理 2.1 (Narasimhan − Okamoto)

1) $(-1)^{q_\Lambda}$ の符号を ε_Λ とかくとき

$$\pi^{\varepsilon_\Lambda} = \pi^{q}_{\Lambda} \oplus \pi^{-\varepsilon_\Lambda}$$

2) Λ が "sufficiently regular" なるとき

$$H_2^{0,q}(E_\Lambda) \neq \{0\} \iff q = q_\Lambda$$

で、かつ、

π^{q}_{Λ} の指標は $\Theta_{w(\Lambda+\rho)}$ である。

系 2.1. discrete class の表現はすべて H^+ 又は H^- の部分表現として得られる。

§3. ディラック作用素

E を n 次元実内積ベクトル空間としその内積から定義される Clifford algebra を cE とする。偶数個の積及び奇数個の積で張られる部分空間を c^+E 及び c^-E とすると明らかに、$(c^+E)(c^-E) = (c^-E)(c^+E) \subset c^-E$, $(c^+E)(c^+E) \subset c^+E$ であり、従って特に c^+E は部分環である。以下 n は偶数と仮定し $n = 2m$ とおく。このとき $cE \otimes \mathbb{C}$ は単純環でありその極小左イデアルの一つを L とすると $cE \otimes \mathbb{C}$ のすべての既約な左加群はすべて L と同型である。

この $cE\otimes\mathbb{C}$ − 加群を $c^+E\otimes\mathbb{C}$ に制限すると二つの同値でない既約な加群に分れその分解を $L = L^+\oplus L^-$ とする。このとき $E\,L^{\pm}\subset L^{\mp}$ である。 $uEu^{-1}=E$ であるような c^+E の unit u で長さが 1 でかつ

$$\rho(u) : E \ni x \longrightarrow uxu^{-1}\in E$$

が特殊直交変換であるようなもののなす群を $Spin(E)$ とかく。 このとき

$$Spin(E)\ni u \longrightarrow \rho(u)\in SO(E)$$

は二葉の covering map である。 $Spin(E)\subset c^+E$ であるから L^+, L^- は共に $Spin(E)$ − module と考えられるが、L^+, L^- は $Spin(E)$ - module としても尚既約である。 これらをそれぞれ ρ_+, ρ_- で表わす。 さて、M を向きづけられたリーマン多様体とし $T(M)$ をその実接バンドルとする。 M 上の $Spin(E)$ − 主バンドル P (ただし $\dim E = \dim M = 2m$ とする) が存在して $T(M)$ が表現 ρ の随伴バンドルとなっているとき M はスピン構造をもつという。
さて、$M = G/K$ を非コンパクト型の対称リーマン空間とし $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K のリー環とする。 §1 と同様に G は単連結な複素化 G_c をもちかつ K は G の極大コンパクト部分群とし さらに $\mathrm{rank}\,G = \mathrm{rank}\,K$ と仮定する。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ をカルタン分解とするとき M のリーマン計量は Killing 形式の $\mathfrak{p}$

への制限によって与えられていると仮定する。このとき $\mathrm{Ad}(K) \subset SO(\mathfrak{p})$ であるが K の適当な二葉の covering group $\tilde{K}$ を考えることにより

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K} & \longrightarrow & \mathrm{Spin}(\mathfrak{p}) \\ \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \\ K & \longrightarrow & SO(\mathfrak{p}) \end{array}$$

なる可換図形が得られ従って $M = G/K$ はスピン構造をもつ。さて任意の $\Lambda \in \mathcal{F}_0'$ に対し $\Lambda + \rho_n$（ただし $\rho_n = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in P_n} \alpha$）を最高ウェイトとする $\tilde{K}$ の表現を $\tilde{\tau}_{\Lambda+\rho_n}$ としその随伴バンドルを $E_{\Lambda+\rho_n}$ とかく。$\mathcal{L}^+, \mathcal{L}^-$ を、それぞれ ρ_+, ρ_- の随伴バンドルとしテンソル積 $\mathcal{L}^+ \otimes E_{\Lambda+\rho_n}$, $\mathcal{L}^- \otimes E_{\Lambda+\rho_n}$ を考えれば表現

$$\tilde{K} \ni k \longmapsto \rho_\pm(k) \otimes \tilde{\tau}_{\Lambda+\rho_n}(k)$$

は $\tilde{K} \to K$ の kernel 上で trivial であることが証明でき従って K の表現に随伴していると考えられる。

さて $\mathrm{Spin}(E)$ 構造により、リーマン接続から自然に定義される共変微分

$$C^\infty(\mathcal{L}^\pm \otimes E_{\Lambda+\rho_n}) \longrightarrow C^\infty(T^*(M) \otimes \mathcal{L}^\pm \otimes E_{\Lambda+\rho_n})$$

と Clifford algebra の積から自然に定義されるバンドル準同型

$$T^*(M) \otimes \mathcal{L}^\pm \longrightarrow \mathcal{L}^\mp$$

を合成することにより一階の微分作用素

$$C^\infty(\mathcal{L}^\pm \otimes E_{\Lambda+\rho_n}) \xrightarrow{D^\pm} C^\infty(\mathcal{L}^\mp \otimes E_{\Lambda+\rho_n})$$

が得られ　これを Dirac 作用素という。 $D^\pm$ の kernel の元で自乗可積分なもの全体を $\mathfrak{H}_\Lambda^\pm$ とする。

$$W = N_{G_c}(T)/Z_{G_c}(T),$$

$$W_G = N_G(T)/Z_G(T)$$

とおくとき W, W_G は $\mathcal{F}'$ に自然に働き　$W \to W/W_G$ の自然な section W^1 が存在して

$$W^1 \times D \ni (s, \lambda) \longmapsto s(\lambda+\rho)-\rho \in \mathcal{F}_0'$$

(ただし D は dominant な整形式全体) なる bijection が定義される。　$\Lambda \in \mathcal{F}_0'$ に対し　$\Lambda = s(\lambda+\rho)-\rho \ ((s,\lambda)\in W^1\times D)$ なるとき，$s = s_\Lambda$, $\lambda = \lambda_\Lambda$ とかく。　任意の $s \in W$ に対し集合 $s(-P)\cap P$ の元の個数が偶数，奇数に従ってそれぞれ　$j(s) = +$, $j(s) = -$ で表わす。　このとき次の消滅定理が成立する。

定理 （R. Parthasarathy）

すべての $\alpha \in P_n$ に対して

$$\langle s_\Lambda \lambda_\Lambda , \alpha \rangle \neq 0$$

なるとき

$$\mathfrak{g}_\lambda^j = \{0\} \quad \text{if} \quad j \neq j(S_\lambda).$$

（広島大理　岡本清郷）